第 2 节 选解析式与选图象（★★）

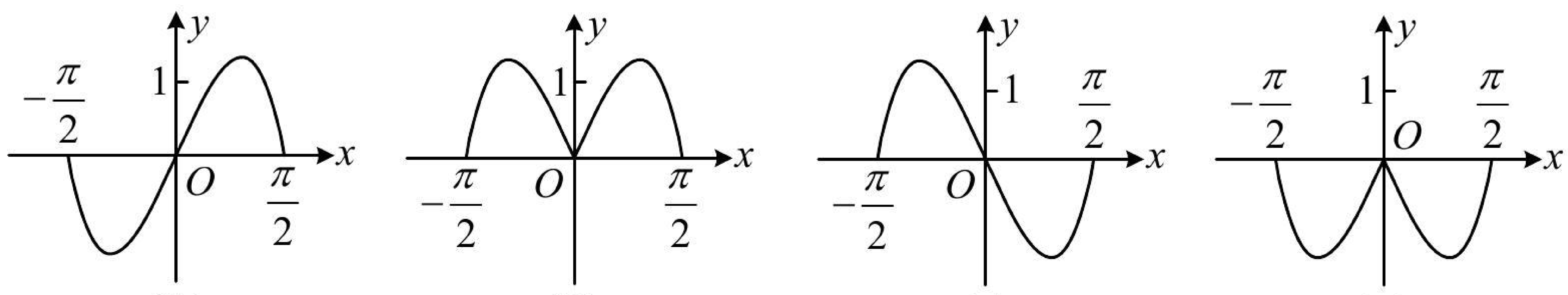
内容提要

本节归纳选解析式与选图象的有关考题，这类题考查的是函数的性质，用排除法选答案是通法，一般可以从以下的一些角度考虑：①奇偶性；②特殊点（或某区间）的函数值；③单调性；④图象变化趋势（极限情况）等.

典型例题

类型Ⅰ：给解析式选图象

【例 1】（2022·全国甲卷）函数 $y=(3^x-3^{-x})\cos x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的大致图象为（　　）



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

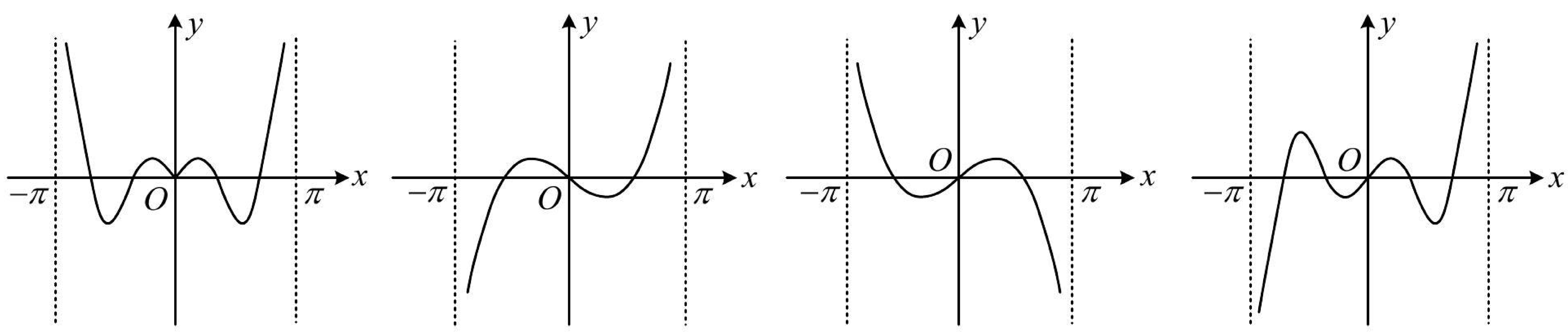
解析：A、C 为奇函数，B、D 为偶函数，所以先从奇偶性排除两个选项，

记 $f(x)=(3^x-3^{-x})\cos x$，则 $f(-x)=(3^{-x}-3^x)\cos(-x)=(3^{-x}-3^x)\cos x=-f(x)\Rightarrow f(x)$ 是奇函数，排除 B、D；

选项 A、C 的差异为函数值的正负，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$3^x-3^{-x}>0$，$\cos x>0$，故 $f(x)>0$，排除 C，选 A.

答案：A

【例 2】函数 $f(x)=\frac{\sin 3x}{1+\cos x}(-\pi<x<\pi)$ 的大致图象为（　　）



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

解析：选项 A 关于 y 轴对称，其余关于原点对称，所以可先判断奇偶性，

$f(-x)=\frac{\sin 3(-x)}{1+\cos(-x)}=-\frac{\sin 3x}{1+\cos x}=-f(x)\Rightarrow f(x)$ 为奇函数，排除 A；

B 和 C、D 在 y 轴右侧附近函数值正负不同，所以计算 y 轴右侧附近某处的函数值，

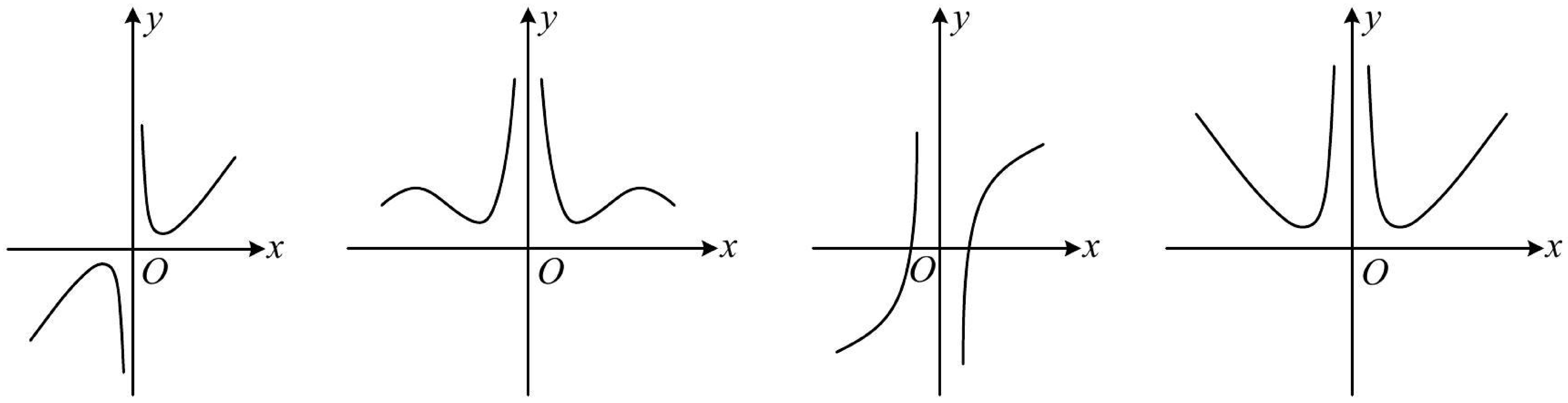
例如，$f(0.1)=\frac{\sin 0.3}{1+\cos 0.1}>0$，从而可排除 B；

选项 C、D 怎么看呢？它们的明显差异是 $(0,\pi)$ 上的零点个数不同，所以可分析零点个数来排除，

$f(x)=0 \Leftrightarrow \sin 3x=0 \Leftrightarrow 3x=k\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{3}(k\in \mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有零点 $\dfrac{\pi}{3}$ 和 $\dfrac{2\pi}{3}$，排除 C，选 D.

答案：D

【例 3】函数 $f(x)=\dfrac{|x|x^2-\ln|x|}{x^2}$ 的大致图象为（　　）



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

解析：所给图象中有关于原点对称的，有关于 y 轴对称的，所以先判断奇偶性，

$f(-x)=\dfrac{|-x|(-x)^2-\ln|-x|}{(-x)^2}=\dfrac{|x|x^2-\ln|x|}{x^2}=f(x)\Rightarrow f(x)$ 为偶函数，排除 A、C；

选项 B、D 在 $x\to+\infty$ 时趋势不同，可分析极限来排除选项，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{|x|x^2-\ln|x|}{x^2}=x-\dfrac{\ln x}{x^2}$，

注意到 $\dfrac{\ln x}{x^2}$ 这个部分，尽管分子分母都趋于 $+\infty$，但我们知道 $\ln x$ 趋于 $+\infty$ 的速率比 x^2 慢，

所以这部分极限为 0，从而 $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x^2}\to+\infty$，排除 B，选 D.

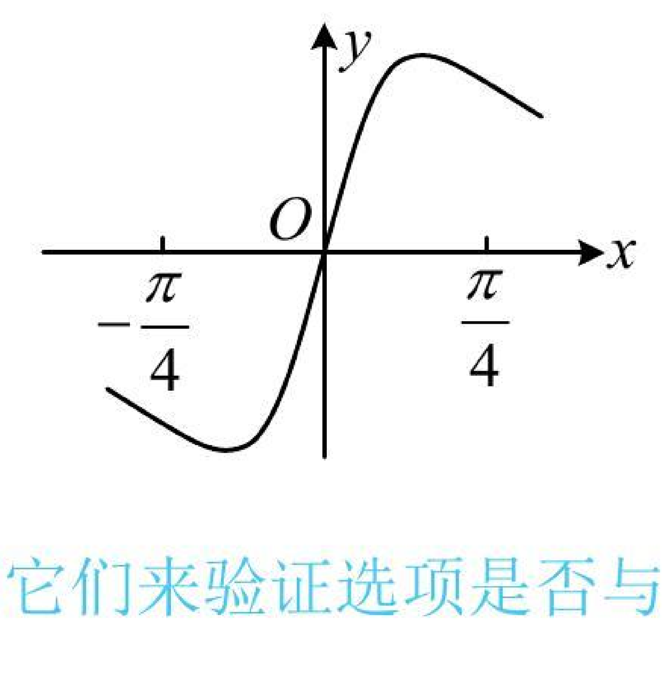
答案：D

【反思】$y=a^x(a>1)$，$y=\log_b x(b>1)$，$y=x^m(m>0)$ 这三类函数，当 $x\to+\infty$ 时，函数值 y 都趋于 $+\infty$，但从增长速率来看，$y=a^x$ 最快，$y=x^m$ 其次，$y=\log_b x$ 最慢.

类型Ⅱ：给图象选解析式

【例 4】（2021・浙江卷）已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{4}$，$g(x)=\sin x$，则图象为右图的函数可能是（　　）

（A）$y=f(x)+g(x)-\dfrac{1}{4}$　　（B）$y=f(x)-g(x)-\dfrac{1}{4}$　　（C）$y=f(x)g(x)$　　（D）$y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$



解析：这道题是给了图象，反过来让选解析式，我们应挖掘所给图象的性质，并用它们来验证选项是否与

之吻合，这里图象反映的信息有奇偶性、$(0,\dfrac{\pi}{4})$上的单调性等方面，

A 项，$y=f(x)+g(x)-\dfrac{1}{4}=x^2+\sin x$为非奇非偶函数，与图象不符，故 A 项错误；

B 项，$y=f(x)-g(x)-\dfrac{1}{4}=x^2-\sin x$为非奇非偶函数，与图象不符，故 B 项错误；

C 项，令$h(x)=f(x)g(x)$，则$h(x)=(x^2+\dfrac{1}{4})\sin x$，所以$h'(x)=2x\sin x+(x^2+\dfrac{1}{4})\cos x$，

从而$h'(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}+(\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{1}{4})\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$，即$h(x)$在$x=\dfrac{\pi}{4}$处的切线斜率为正，与图象不符，排除 C，选 D.

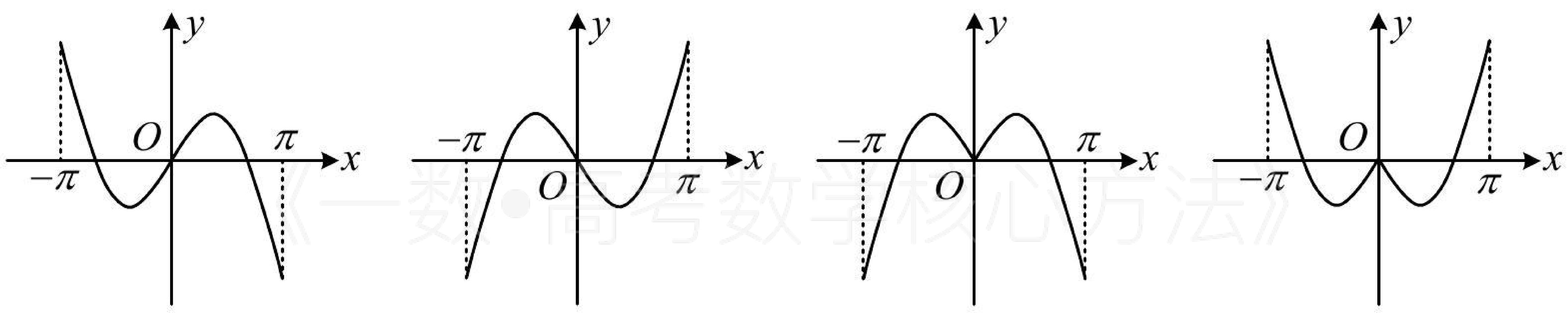
也可直接分析选项 C 的函数在$(0,\dfrac{\pi}{4})$上的单调性，当$x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$时，$f(x)$和$g(x)$均↗，且$f(x)>0$，$g(x)>0$，

所以$y=f(x)g(x)$在$(0,\dfrac{\pi}{4})$上为增函数，与图象不符，从而得出 C 项错误.

答案：D

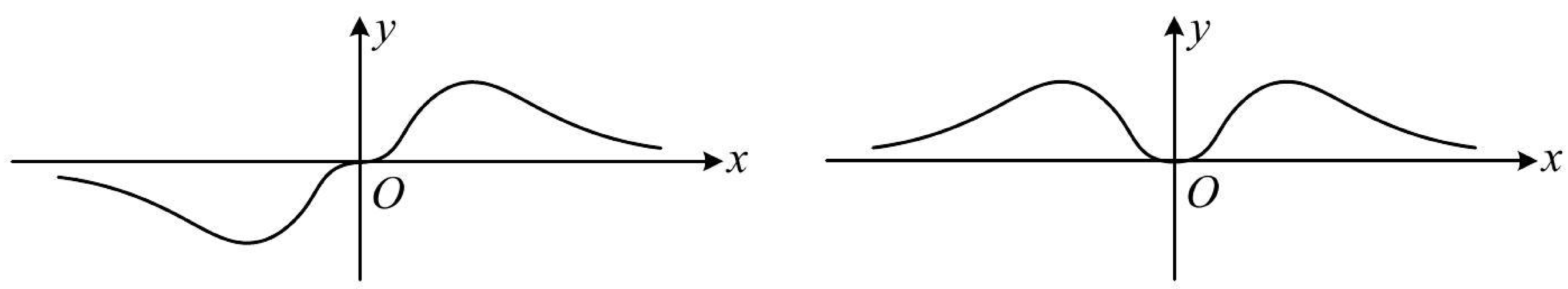
强化训练

1．（2020・浙江卷・★）函数$y=x\cos x+\sin x$在区间$[-\pi,\pi]$上的图象可能是（　　）

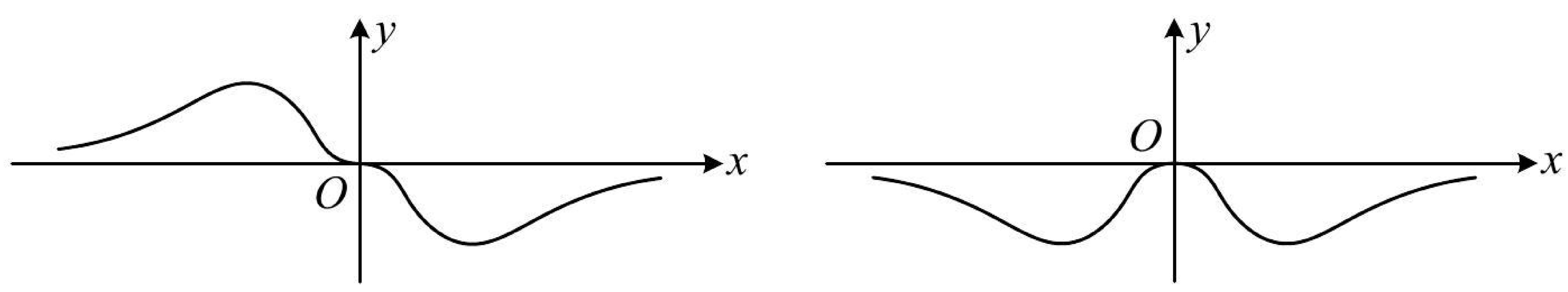


(A)　(B)　(C)　(D)

2．（2022・湖北月考・★）函数$f(x)=\dfrac{x^3}{3^x+3^{-x}}$的部分图象大致为（　　）

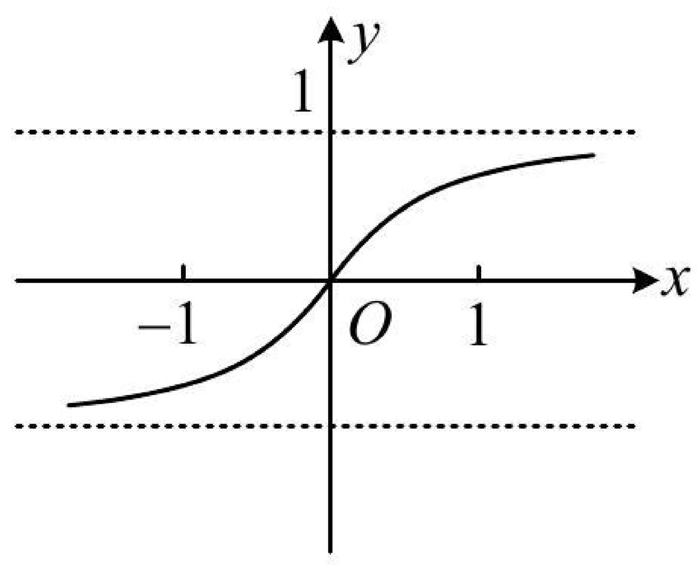


(A)　(B)

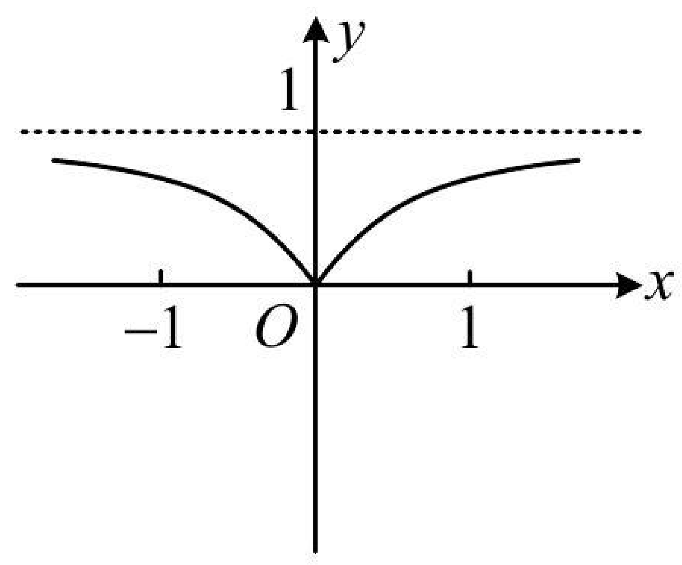


(C)　(D)

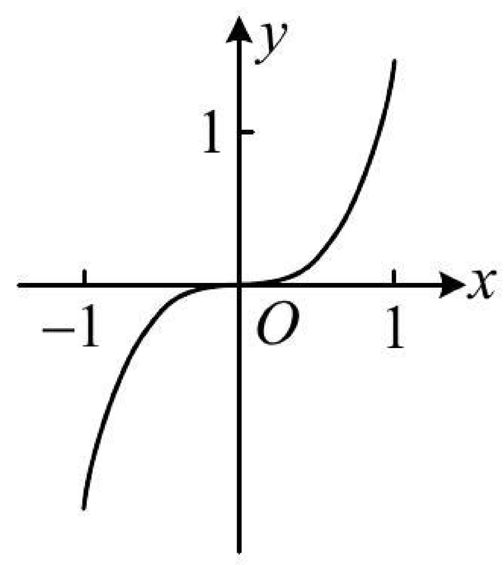
3．（2022·衢州期末·★★）函数 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^{|x|}}$ 的部分图象大致为（　　）



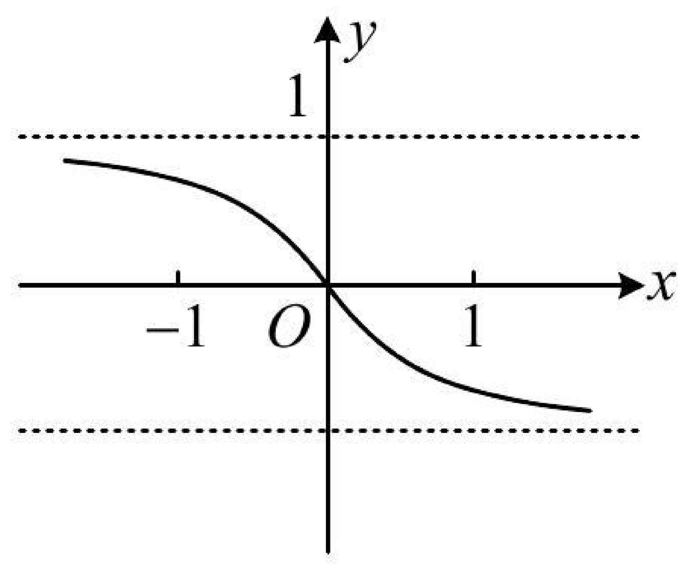
(A)



(B)

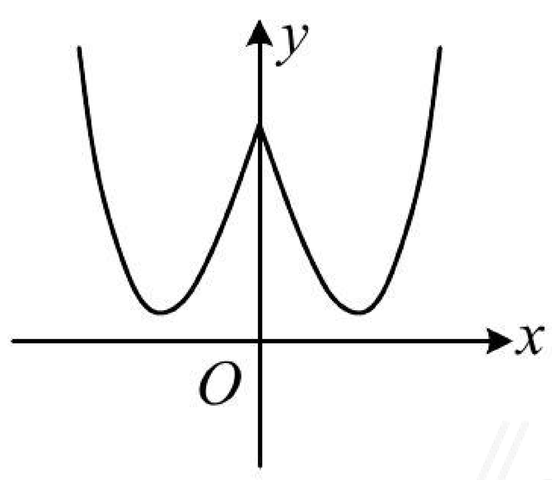


(C)

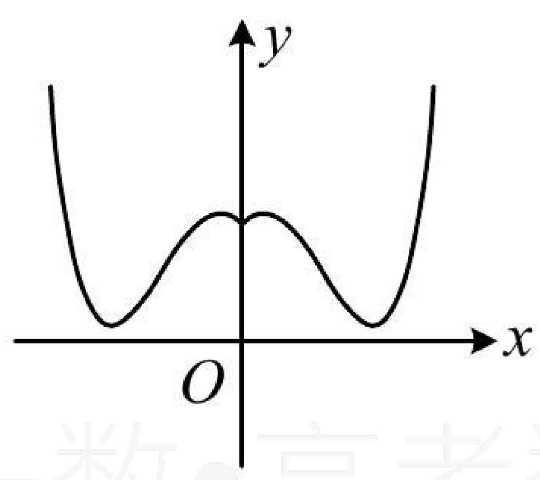


(D)

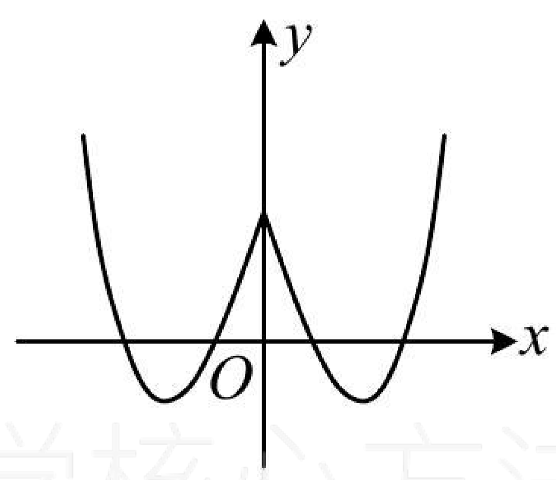
4．（2022·浙江期中·★★★）已知函数 $f(x)=e^{|x|}-2x^2$，则 $f(x)$ 的图象可能是（　　）



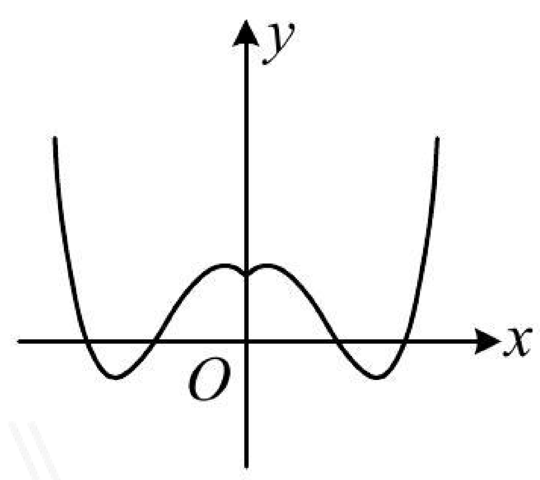
(A)



(B)



(C)



(D)

5．（2022·全国乙卷·★★★）右图是下列四个函数中的某个函数在 $[-3,3]$ 的大致图象，则该函数是（　　）

（A）$y=\dfrac{-x^3+3x}{x^2+1}$　（B）$y=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$　（C）$y=\dfrac{2x\cos x}{x^2+1}$　（D）$y=\dfrac{2\sin x}{x^2+1}$